

**CHUYÊN ĐỀ:****NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN  
VÀ ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN  
NGUYÊN HÀM.****Chủ đề 1:****I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.**

**1. Định nghĩa:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $K$  ( $K$  là khoảng, đoạn hay nửa khoảng). Hàm số  $F(x)$  được gọi là nguyên hàm của hàm số  $f(x)$  trên  $K$  nếu  $F'(x) = f(x)$  với mọi  $x \in K$ .

Ký hiệu  $\int f(x)dx = F(x) + C$ .

**2. Tính chất của nguyên hàm**

**Tính chất 1:**  $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$  và  $\int f'(x)dx = f(x) + C$

**Tính chất 2:**  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$  với  $k$  là hằng số khác 0.

**Tính chất 3:**  $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

**3. Sự tồn tại của nguyên hàm**

**Định lý:** Mọi hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $K$  đều có nguyên hàm trên  $K$ .

**4. Bảng nguyên hàm của một số hàm số sơ cấp**

| Nguyên hàm của hàm số sơ cấp                                              | Nguyên hàm của hàm số hợp ( $u = u(x)$ )                                  |
|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|
| $\int dx = x + C$                                                         | $\int du = u + C$                                                         |
| $\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$ | $\int u^\alpha du = \frac{1}{\alpha+1} u^{\alpha+1} + C (\alpha \neq -1)$ |
| $\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$                                        | $\int \frac{1}{u} du = \ln u  + C$                                        |
| $\int e^x dx = e^x + C$                                                   | $\int e^u du = e^u + C$                                                   |
| $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$                   | $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1)$                   |
| $\int \sin x dx = -\cos x + C$                                            | $\int \sin u du = -\cos u + C$                                            |
| $\int \cos x dx = \sin x + C$                                             | $\int \cos u du = \sin u + C$                                             |
| $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int (1 + \tan^2 x) dx = \tan x + C$        | $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$                                 |
| $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$                                | $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$                                |

**5. Phương pháp tìm nguyên hàm****a. Phương pháp đổi biến số**

**Định lý 1:** Nếu  $\int f(u)du = F(u) + C$  và  $u = u(x)$  là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f(u(x))u'(x)dx = F(u(x)) + C$$

**Hệ quả:** Nếu  $u = ax + b (a \neq 0)$  thì ta có  $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$

**b. Phương pháp nguyên hàm từng phần**

**Định lý 2:** Nếu hai hàm số  $u = u(x)$  và  $v = v(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $K$  thì

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \quad \text{Hay} \quad \int u dv = uv - \int v du$$

## II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

**Câu 1.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2x^3 - 9$ .

- A.  $\frac{1}{2}x^4 - 9x + C$ .      B.  $4x^4 - 9x + C$ .      C.  $\frac{1}{4}x^4 + C$ .      D.  $4x^3 + 9x + C$ .

**Câu 2.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = x^2 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{3}$ .

- A.  $\frac{x^3}{3} - 5\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{3}x + C$       B.  $\frac{x^3}{3} - 5\ln|x| + \frac{3}{x} - \frac{1}{3}x + C$   
C.  $2x^3 - 5\ln|x| - \frac{3}{x} - \frac{1}{3}x + C$       D.  $2x - \frac{5}{x^2} + \frac{3x}{x^4} + C$

**Câu 3.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3}$  là:

- A.  $-\frac{x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$       B.  $-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{x} - \frac{x}{3} + C$       C.  $\frac{-x^4 + x^2 + 3}{3x} + C$       D.  $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} + C$

**Câu 4.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

- A.  $F(x) = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{4} + C$       B.  $F(x) = \frac{3x\sqrt[3]{x}}{4} + C$       C.  $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x}} + C$       D.  $F(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2}} + C$

**Câu 5.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$

- A.  $F(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} + C$       B.  $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$       C.  $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + C$       D.  $F(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2} + C$

**Câu 6.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{x^2}$ .

- A.  $F(x) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}} + C$       B.  $F(x) = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{x^2} + C$   
C.  $F(x) = \frac{2-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + C$       D.  $F(x) = \frac{1+2\sqrt{x}}{x} + C$

**Câu 7.** Tính  $\int \left( \frac{5}{x} + \sqrt{x^3} \right) dx$  bằng:

- A.  $5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$       B.  $-5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$       C.  $-5\ln|x| - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$       D.  $5\ln|x| + \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

**Câu 8.** Tính  $\int (3^x + 4^x) dx$  bằng:

- A.  $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{4^x}{\ln 4} + C$       B.  $\frac{3^x}{\ln 4} + \frac{4^x}{\ln 3} + C$       C.  $\frac{4^x}{\ln 3} + \frac{3^x}{\ln 4} + C$       D.  $\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{4^x}{\ln 4} + C$

**Câu 9.** Tính  $\int (3 \cdot 2^x + \sqrt{x}) dx$

- A.  $\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$       B.  $3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$       C.  $\frac{2^x}{3 \cdot \ln 2} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C$       D.  $3 \cdot \frac{2^x}{\ln 2} + \sqrt{x^3} + C$

**Câu 10.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 2^{3x} \cdot 3^{2x}$  là:

- A.  $F(x) = \frac{2^{3x}}{3 \ln 2} \cdot \frac{3^{2x}}{2 \ln 3} + C$       B.  $F(x) = \frac{72^x}{\ln 72} + C$   
C.  $F(x) = \frac{2^{3x} \cdot 3^{2x}}{\ln 6} + C$       D.  $F(x) = \frac{\ln 72}{72} + C$

**Câu 11.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = e^{3x} \cdot 3^x$  là:

**A.**  $F(x) = \frac{(3.e^3)^x}{\ln(3.e^3)} + C$

**B.**  $F(x) = 3 \cdot \frac{e^{3x}}{\ln(3.e^3)} + C$

**C.**  $F(x) = \frac{(3.e)^x}{\ln(3.e^3)} + C$

**D.**  $F(x) = \frac{(3.e^3)^x}{\ln 3} + C$

**Câu 12.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{3^{x+1}}{4^x}$  là:

**A.**  $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} + C$  **B.**  $F(x) = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} + C$  **C.**  $F(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + C$  **D.**  $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^x}{\ln \frac{3}{4}} + C$

**Câu 13.** Tính  $\int (3x-1)^5 dx$  bằng

**A.**  $\frac{1}{18}(3x-1)^6 + C$  **B.**  $\frac{(3x-1)^6}{6} + C$  **C.**  $-\frac{(3x-1)^6}{6} + C$  **D.**  $-\frac{(3x-1)^6}{18} + C$

**Câu 14.** Tính  $\int (\pi-2x)^4 dx$  bằng

**A.**  $-\frac{(\pi-2x)^5}{5} + C$  **B.**  $-\frac{(\pi-2x)^5}{10} + C$  **C.**  $\frac{(\pi-2x)^5}{5} + C$  **D.**  $\frac{(\pi-2x)^5}{10} + C$

**Câu 15.** Tính  $\int \frac{1}{(5x-3)^2} dx$  bằng:

**A.**  $-\frac{1}{5(5x-3)} + C$  **B.**  $\frac{1}{5(5x-3)} + C$  **C.**  $-\frac{1}{(5x-3)} + C$  **D.**  $-\frac{1}{5(5x+3)} + C$

**Câu 16.** Tính  $\int \frac{3}{2x+5} dx$  bằng

**A.**  $2\ln|2x+5| + C$  **B.**  $\frac{3}{2}\ln|2x+5| + C$  **C.**  $3\ln|2x+5| + C$  **D.**  $\frac{3}{2}\ln|2x-5| + C$

**Câu 17.** Tính  $\int \frac{dx}{2-3x}$  bằng:

**A.**  $\frac{1}{(2-3x)^2} + C$  **B.**  $-\frac{3}{(2-3x)^2} + C$  **C.**  $\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C$  **D.**  $-\frac{1}{3}\ln|3x-2| + C$

**Câu 18.** Tính  $\int e^{1-3x} dx$  bằng:

**A.**  $F(x) = \frac{3}{e^{1-3x}} + C$  **B.**  $F(x) = \frac{e^{1-3x}}{3} + C$  **C.**  $F(x) = -\frac{3e}{e^{3x}} + C$  **D.**  $F(x) = -\frac{e}{3e^{3x}} + C$

**Câu 19.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3\sin x - \frac{2}{\cos^2 x}$

**A.**  $-3\cos x - 2\tan x + C$  **B.**  $-\frac{3}{2}(2\cos x - 2\tan x) + C$   
**C.**  $-\frac{3}{2}(2\cos x + 2\tan x) + C$  **D.**  $\frac{3}{2}(2\cos x - 2\tan x) + C$

**Câu 20.** Tính  $\int \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) dx$  bằng

**A.**  $\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + C$  **B.**  $-\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + C$   
**C.**  $-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + C$  **D.**  $-\sin\left(\frac{2\pi}{3} - 2x\right) + C$

**Câu 21.** Tính  $\int \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) dx$  bằng

**A.**  $\frac{1}{3} \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

**B.**  $\frac{1}{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

**C.**  $-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

**D.**  $-\frac{1}{3} \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) + C$

**Câu 22.** Nguyên hàm của  $2x(1+3x^3)$  là:

**A.**  $x^2\left(x + \frac{x^3}{5}\right) + C$

**B.**  $x^2(1+3x^2) + C$

**C.**  $\frac{2x(x+x^3)}{5} + C$

**D.**  $x^2\left(1 + \frac{6x^3}{5}\right) + C$

**Câu 23.** Tính  $\int x^2(1-2x)^2 dx$  bằng

**A.**  $x^3(1-2x)^3 + C$

**B.**  $-\frac{1}{2}x^3(1-2x)^3 + C$

**C.**  $4x(1-2x) + C$

**D.**  $\frac{12x^5 - 15x^4 + 5x^3}{15} + C$

**Câu 24.** Tính  $\int \frac{3x^2 + 2x - 3}{x^2} dx$  bằng

**A.**  $3x + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$

**B.**  $\frac{x + x^2 - 3x}{x^3} + C$

**C.**  $\frac{3(x + x^2 - 3x)}{x^3} + C$

**D.**  $\frac{3(x + x^2 - 3x)}{x^3} + C$

**Câu 25.** Tính  $\int e^x(1 - 2e^{-x}) dx$  bằng

**A.**  $e^x - 2x + C$

**B.**  $e^x - 2e^{2x} + C$

**C.**  $e^x(x - 2e^{-x}) + C$

**D.**  $e^x(x + 2e^{-x}) + C$

**Câu 26.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = 3^{1-2x} \cdot 2^{3x}$  là:

**A.**  $F(x) = \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$

**B.**  $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{9}{8}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$

**C.**  $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{8}{9}} + C$

**D.**  $F(x) = 3 \frac{\left(\frac{8}{9}\right)^x}{\ln \frac{9}{8}} + C$

**Câu 27.** Tìm một nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = 4x^2(x-1)$ , biết  $F(1) = \frac{2}{3}$ .

**A.**  $F(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 1$

**B.**  $F(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 - 1$

**C.**  $F(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 1$

**D.**  $F(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 1$

**Câu 28.** Tính  $\int \frac{1}{e^{2-5x}} dx$  là:

**A.**  $F(x) = \frac{5}{e^{2-5x}} + C$

**B.**  $F(x) = -\frac{5}{e^{2-5x}} + C$

**C.**  $F(x) = -\frac{e^{2-5x}}{5} + C$

**D.**  $F(x) = \frac{e^{5x}}{5e^2} + C$

**Câu 29.** Tính  $\int \left(\frac{1}{3}e^x - 2^x \cdot 3^{2x}\right) dx$

**A.**  $\frac{1}{3}e^x - \frac{18^x}{\ln 18} + C$

**B.**  $\frac{1}{3}e^x - \frac{2^x}{\ln 2} + C$

**C.**  $\frac{1}{3}e^x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

**D.**  $\frac{1}{3}e^x - \frac{9^x}{\ln 9} + C$

**Câu 30.** Tính  $\int (3\cos x - 3^{x-1}) dx$

A.  $\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$     B.  $-3\sin x - \frac{3^x}{3\ln 3} + C$     C.  $3\sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$     D.  $3\sin x - \frac{3^x}{3\ln 3} + C$

**Câu 31.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{3}\sin x - 3^{2x-1} \cdot 2^{3x}$

A.  $-\frac{1}{3}\left(\cos x + \frac{72^x}{\ln 72}\right) + C$     B.  $\frac{1}{3}\left(\cos x + \frac{72^x}{\ln 72}\right) + C$   
 C.  $\frac{1}{3}\left(\cos x - \frac{72^x}{\ln 72}\right) + C$     D.  $-\frac{1}{3}\left(-\cos x - \frac{72^x}{\ln 72}\right) + C$

## Mức độ 2: THÔNG HIỂU

**Câu 32.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^3}{x+2}$ . Biết đồ thị của hàm số  $F(x)$  đi qua điểm

$M\left(-1; -\frac{16}{3}\right)$ .

A.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + 1$     B.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + 2$   
 C.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 2$     D.  $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln|x+2|$

**Câu 33.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ , biết  $F(1) = \frac{1}{3}$ .

A.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{6}{13}$     B.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1}$   
 C.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} + \frac{13}{6}$     D.  $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x+1} - \frac{13}{6}$

**Câu 34.** Tìm nguyên hàm  $F(x)$  của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ . Biết đồ thị của hàm số  $F(x)$  đi qua điểm

$M\left(\frac{\pi}{6}; 0\right)$

A.  $F(x) = -\cot x + \sqrt{3}$     B.  $F(x) = \tan x + \sqrt{3}$   
 C.  $F(x) = \cot x + \sqrt{3}$     D.  $F(x) = -\cot x - \sqrt{3}$

**Câu 35.** Tìm hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $f'(x) = 2x + 1$  và  $f(1) = 5$

A.  $f(x) = x^2 + x - 3$     B.  $f(x) = x^2 + x + 3$   
 C.  $f(x) = x^2 + x - 1$     D.  $f(x) = x^2 + x + 2$

**Câu 36.** Tìm hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $f'(x) = 2 - x^2$  và  $f(2) = \frac{7}{3}$

A.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$     B.  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x + 1$   
 C.  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x - 1$     D.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$

**Câu 37.** Tìm hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $f'(x) = 4\sqrt{x} - x$  và  $f(4) = 0$

A.  $f(x) = \frac{8}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{40}{3}$     B.  $f(x) = \frac{3}{8}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{40}{3}$   
 C.  $f(x) = \frac{8}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{40}{3}$     D.  $f(x) = \frac{3}{8}\sqrt{x^3} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{40}{3}$

**Câu 38.** Tìm hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $f'(x) = 3(x+2)^2$  và  $f(0) = 8$

A.  $f(x) = (x+2)^3$

B.  $f(x) = 3(x+2)^3$

C.  $f(x) = (x+2)^3 + 3$

D.  $f(x) = (x+2)^3 - 3$

**Câu 39.** Tìm hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $f'(x) = (x+1)(x-1)+1$  và  $f(0) = 1$

A.  $f(x) = \frac{x^3}{3} - 1$

B.  $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 1$

C.  $f(x) = \frac{x^3}{3} + 1$

D.  $f(x) = -\frac{x^3}{3} - 1$

**Câu 40.** Tìm hàm số  $y = f(x)$  biết rằng  $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}$ ;  $f(4) = 9$  và  $f(1) = 4$

A.  $f(x) = \frac{5}{7}\sqrt{x^3} + \frac{23}{7}$

B.  $f(x) = \frac{7}{5}\sqrt{x^3} + \frac{23}{7}$

C.  $f(x) = \frac{5}{7}\sqrt{x^3} + \frac{7}{23}$

D.  $f(x) = \frac{5}{7}\sqrt{x^3} - \frac{23}{7}$

**Câu 41.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

A.  $\tan x - \cot x + C$

B.  $\tan x + \cot x + C$

C.  $\frac{1}{\tan x} - \frac{1}{\cot x} + C$

D.  $\frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{\cot^2 x} + C$

**Câu 42.** Nguyên hàm của hàm số  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$

A.  $2 \tan 2x + C$

B.  $-2 \cot 2x + C$

C.  $4 \cot 2x + C$

D.  $2 \cot 2x + C$

**Câu 43.** Tính  $\int e^x \left( 3 - \frac{e^{-x}}{\sin^2 x} \right) dx$  bằng

A.  $3e^x - \cot x + C$

B.  $3e^x + \tan x + C$

C.  $3e^x + \cot x + C$

D.  $3e^x - \frac{1}{\cot^2 x} + C$

**Câu 44.** Tính  $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx$  bằng

A.  $\frac{5}{2}x^2\sqrt{x} + x + C$

B.  $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + x + C$

C.  $\frac{2}{5}x\sqrt{x} + x + C$

D.  $\frac{5}{2}x\sqrt{x} + x + C$

**Câu 45.** Tính  $\int \left( 3^x - \frac{1}{3^x} \right)^2 dx$  bằng:

A.  $\left( \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{\ln 3}{3^x} \right)^2 + C$

B.  $\frac{1}{3} \left( \frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{3^x \ln 3} \right)^3 + C$

C.  $\frac{9^x}{2 \ln 3} - \frac{1}{2 \cdot 9^x \ln 3} - 2x + C$

D.  $\frac{1}{2 \ln 3} \left( 9^x + \frac{1}{9^x} \right) - 2x + C$

**Câu 46.** Tính  $\int (\cos x - \sin x)^2 dx$  bằng

A.  $(\sin x + \cos x)^2 + C$

B.  $\frac{(\sin x + \cos x)^3}{3} + C$

C.  $\frac{2x + \cos 2x}{2} + C$

D.  $x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

**Câu 47.** Tính  $\int (2 - \sin x)^2 dx$  bằng

A.  $\frac{18x + 16 \cos x - \cos 2x}{4} + C$

B.  $\frac{(2x + \cos x)^3}{3} + C$

C.  $\frac{2x + \cos x}{3} + C$

D.  $\frac{(2x - \cos x)^3}{3} + C$

**Câu 48.** Tính  $\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{2}\sin 2x + C$

B.  $5\sin^5 x + 5\cos^5 x + C$

C.  $4\cos^5 x - 4\sin^5 x + C$

D.  $\frac{1}{2}\sin 2x + C$

**Câu 49.** Tính  $\int \cos^2 2x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$

B.  $\frac{2\sin^3 2x}{3} + C$

C.  $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C$

D.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cos 4x + C$

**Câu 50.** Tính  $\int \cos^2 \frac{2x}{3} dx$  bằng:

A.  $\frac{3}{2}\cos^4 \frac{2x}{3} + C$

B.  $\frac{1}{2}\cos^4 \frac{2x}{3} + C$

C.  $\frac{x}{2} + \frac{3}{8}\sin \frac{4x}{3} + C$

D.  $\frac{x}{2} - \frac{4}{3}\cos \frac{4x}{3} + C$

**Câu 51.** Tính  $\int \cos^4 x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{5}\sin^5 x + C$

B.  $\frac{1}{3}(x - 2\cos x)^3 + C$

C.  $\frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

D.  $\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

**Câu 52.** Tính  $\int \sin^2 3x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + C$

B.  $\frac{2\cos^3 3x}{3} + C$

C.  $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 3x\right) + C$

D.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\cos 6x + C$

**Câu 53.** Tính  $\int \sin^4 x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{5}\cos^5 x + C$

B.  $\frac{1}{5}(x - 2\sin 2x)^5 + C$

C.  $\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C$

D.  $\frac{3}{2}x + \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

**Câu 54.** Tính  $\int \tan x dx$  bằng

A.  $\ln|\cos x| + C$

B.  $-\ln|\cos x| + C$

C.  $\ln(\cos x) + C$

D.  $-\ln(\cos x) + C$

**Câu 55.** Câu 46: Tính  $\int \cot x dx$  bằng

A.  $\ln|\sin x| + C$

B.  $-\ln|\sin x| + C$

C.  $\ln(\sin x) + C$

D.  $-\ln(\sin x) + C$

**Câu 56.** Tính  $\int \tan^2 x dx$  bằng

A.  $\tan x + x + C$

B.  $\cot x + x + C$

C.  $\tan x - x + C$

D.  $\cot x - x + C$

**Câu 57.** Tính  $\int \cot^2 x dx$  bằng

A.  $-(\cot x - x) + C$

B.  $\cot x + x + C$

C.  $-(\cot x + x) + C$

D.  $\cot x - x + C$

**Câu 58.** Tính  $\int \cos 3x \cdot \cos x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

B.  $\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$

C.  $\frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$

D.  $\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

**Câu 59.** Tính  $\int \sin 2x \cdot \sin 3x dx$  bằng

A.  $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{5}\sin 5x + C$

B.  $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{5}\sin 5x + C$

C.  $\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{10}\sin 5x + C$

D.  $\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{10}\sin 5x + C$

**Câu 60.** Tính  $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$  bằng

A.  $-\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{6}\cos 3x + C$

C.  $\frac{1}{6}\cos x - \frac{1}{2}\cos 3x + C$

B.  $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$

D.  $-\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{6}\cos 3x + C$

**Câu 61.** Tính  $\int (\cos 4x \cdot \cos x - \sin 4x \cdot \sin x) dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{5}\sin 5x + C$

C.  $\frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$

B.  $\frac{1}{3}\sin 3x + C$

D.  $\frac{1}{4}(\sin 4x - \cos 4x) + C$

**Câu 62.** Tính  $\int \cos 8x \cdot \sin x dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{8}\sin 8x \cdot \cos x + C$

C.  $\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{18}\cos 9x + C$

B.  $-\frac{1}{8}\sin 8x \cdot \cos x + C$

D.  $\frac{1}{18}\cos 9x - \frac{1}{14}\cos 7x + C$

**Câu 63.** Tính  $\int \sin^2 2x dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x + C$

C.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + C$

B.  $\frac{1}{3}\sin^3 2x + C$

D.  $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 4x + C$

**Câu 64.** Tính  $\int (\sin 2x - \cos 2x)^2 dx$  bằng:

A.  $\frac{(\sin 2x - \cos 2x)^3}{3} + C$

C.  $x - \frac{1}{2}\sin 2x + C$

B.  $\left(-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 + C$

D.  $x + \frac{1}{4}\cos 4x + C$

**Câu 65.** Tính  $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x + 1} dx$  bằng:

A.  $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x + 1| + C$

C.  $\frac{x^2}{2} + x + 2\ln|x - 1| + C$

B.  $\frac{x^2}{2} + x + \ln|x + 1| + C$

D.  $x + 2\ln|x + 1| + C$

**Câu 66.** Tính  $\int \frac{x^3 + 1}{x + 2} dx$  bằng

A.  $\frac{x^3}{3} + 4x - 7\ln|x + 2| + C$

C.  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 7\ln|x + 2| + C$

B.  $\frac{x^3}{3} - x + 7\ln|x + 2| + C$

D.  $\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x + 7\ln|x + 2| + C$

**Câu 67.** Tính  $\int \frac{3x - 1}{x + 2} dx$  bằng:

A.  $3x + 7\ln|x + 2| + C$

B.  $3x - \ln|x + 2| + C$

C.  $3x + \ln|x + 2| + C$

D.  $3x - 7\ln|x + 2| + C$

**Câu 68.** Tính  $\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} dx$  bằng:

A.  $3\ln|x - 2| - 2\ln|x - 1| + C$

C.  $2\ln|x - 2| - 3\ln|x - 1| + C$

B.  $3\ln|x - 2| + 2\ln|x - 1| + C$

D.  $2\ln|x - 2| + 3\ln|x - 1| + C$

**Câu 69.** Tính  $\int \frac{x - 12}{x^2 + x - 6} dx$  bằng

**A.**  $3\ln|x+3|-2\ln|x-2|+C$

**C.**  $3\ln|x+3|+2\ln|x-2|+C$

**B.**  $2\ln|x+3|-3\ln|x-2|+C$

**D.**  $2\ln|x+3|+3\ln|x-2|+C$

**Câu 70.** Tính  $\int \frac{x}{x^2+3x+2} dx$  bằng

**A.**  $2\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$

**C.**  $2\ln|x+2|+\ln|x+1|+C$

**B.**  $\ln|x+2|-2\ln|x+1|+C$

**D.**  $\ln|x+2|+2\ln|x+1|+C$

**Câu 71.** Tính  $\int \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$  bằng:

**A.**  $\ln|(x+1)(x+2)|+C$

**C.**  $\ln|x+1|+C$

**B.**  $\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C$

**D.**  $\ln|x+2|+C$

**Câu 72.** Tính  $\int \frac{1}{x^2-4x-5} dx$  bằng:

**A.**  $\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

**B.**  $6\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

**C.**  $\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

**D.**  $-\frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-5}{x+1}\right|+C$

**Câu 73.** Tính  $\int \frac{x-1}{x^2-6x+9} dx$  bằng

**A.**  $2\ln|x-3|-\frac{1}{x-3}+C$

**C.**  $\ln|x-3|+\frac{2}{x-3}+C$

**B.**  $\ln|x-3|-\frac{2}{x-3}+C$

**D.**  $2\ln|x-3|+\frac{1}{x-3}+C$

**Câu 74.** Tính  $\int \frac{1}{x^2+6x+9} dx$  bằng:

**A.**  $-\frac{1}{x+3}+C$

**B.**  $\frac{1}{x-3}+C$

**C.**  $-\frac{1}{x-3}+C$

**D.**  $\frac{1}{3-x}+C$

**Câu 75.** Tính  $\int x(1-x^2)^{10} dx$  bằng:

**A.**  $-\frac{(1-x^2)^{11}}{22}+C$

**B.**  $\frac{(1-x^2)^{11}}{22}+C$

**C.**  $-\frac{(1-x^2)^{22}}{11}+C$

**D.**  $-\frac{(1-x^2)^{11}}{11}+C$

**Câu 76.** Tính  $\int \frac{x}{(x+1)^2} dx$  bằng:

**A.**  $\ln|x+1|+x+1+C$

**B.**  $\ln|x+1|+C$

**C.**  $\frac{1}{x+1}+C$

**D.**  $\ln|x+1|+\frac{1}{x+1}+C$

**Câu 77.** Tính  $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$  bằng:

**A.**  $\frac{1}{2}\sqrt{3x^2+2}+C$

**B.**  $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C$

**C.**  $\sqrt{2x^2+3}+C$

**D.**  $2\sqrt{2x^2+3}+C$

**Câu 78.** Tính  $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$  bằng:

**A.**  $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

**B.**  $\frac{3}{2}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$

**C.**  $\frac{2}{3}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+C$

**D.**  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+C$

**Câu 79.** Tính  $\int x\sqrt[3]{x^2+1} dx$  bằng:

**A.**  $\frac{8}{3}\sqrt[4]{(x^2+1)^3}+C$

**B.**  $\frac{8}{3}\sqrt[3]{(x^2+1)^4}+C$

**C.**  $\frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+C$

**D.**  $\frac{3}{8}(x^2+1)\sqrt[3]{x^2+1}+C$

**Câu 80.** Tính  $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx$  bằng:

A.  $e^x + x + C$       B.  $\ln|e^x + 1| + C$       C.  $\frac{e^x}{e^x + x} + C$       D.  $\frac{1}{\ln|e^x + 1|} + C$

**Câu 81.** Tính  $\int x.e^{x^2+1} dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{2}e^{x^2+1} + C$       B.  $e^{x^2+1} + C$       C.  $2e^{x^2+1} + C$       D.  $x^2.e^{x^2+1} + C$

**Câu 82.** Tính  $\int \frac{e^x}{x^2} dx$  bằng:

A.  $e^{\frac{1}{x}} + C$       B.  $-e^x + C$       C.  $-e^{\frac{1}{x}} + C$       D.  $\frac{1}{\frac{1}{e^x}} + C$

**Câu 83.** Tính  $\int \frac{e^x}{\sqrt[3]{2-e^x}} dx$  bằng:

A.  $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-e^x)^2} + C$       B.  $-\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-e^x)^2} + C$       C.  $\frac{3}{2}\sqrt{(2-e^x)^3} + C$       D.  $-\frac{3}{2}\sqrt{(2-e^x)^3} + C$

**Câu 84.** Tính  $\int \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx$  bằng:

A.  $(e^x + 1) \cdot \ln|e^x + 1| + C$       B.  $e^x \cdot \ln|e^x + 1| + C$       C.  $e^x + 1 - \ln|e^x + 1| + C$       D.  $\ln|e^x + 1| + C$

**Câu 85.** Tính  $\int \frac{(1 + \ln x)^2}{x} dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{3}(1 + \ln x)^3 + C$       B.  $\frac{1}{3}(1 - \ln x)^3 + C$       C.  $\frac{1}{3}(x + \ln x)^3 + C$       D.  $\frac{1}{3}(x - \ln x)^3 + C$

**Câu 86.** Tính  $\int \frac{1}{x \cdot \ln^5 x} dx$  bằng:

A.  $-\frac{\ln^4 x}{4} + C$       B.  $-\frac{4}{\ln^4 x} + C$       C.  $\frac{1}{4\ln^4 x} + C$       D.  $-\frac{1}{4\ln^4 x} + C$

**Câu 87.** Tính  $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$  bằng:

A.  $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$       B.  $2\sqrt{(\ln x)^3} + C$       C.  $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$       D.  $3\sqrt{(\ln x)^3} + C$

**Câu 88.** Tính  $\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}} dx$  bằng:

A.  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sqrt{1+\ln x} - \sqrt{1+\ln x}\right) + C$       B.  $\left(\frac{1}{3}\sqrt{1+\ln x} - \sqrt{1+\ln x}\right) + C$   
C.  $2\left(\frac{1}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3} - \sqrt{1+\ln x}\right) + C$       D.  $2\left(\frac{1}{3}\sqrt{1+\ln x} + \sqrt{1+\ln x}\right) + C$

**Câu 89.** Tính  $\int \sin^5 x \cdot \cos x dx$  bằng:

A.  $\frac{\sin^6 x}{6} + C$       B.  $-\frac{\sin^6 x}{6} + C$       C.  $-\frac{\cos^6 x}{6} + C$       D.  $\frac{\cos^6 x}{6} + C$

**Câu 90.** Tính  $\int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx$  bằng:

A.  $\frac{-1}{4\cos^4 x} + C$       B.  $\frac{1}{4\cos^4 x} + C$       C.  $\frac{1}{4\sin^4 x} + C$       D.  $\frac{-1}{4\sin^4 x} + C$

**Câu 91.** Tính  $\int \frac{3\cos x}{2 + \sin x} dx$  bằng:

**A.**  $3\ln(2 + \sin x) + C$     **B.**  $-3\ln|2 + \sin x| + C$     **C.**  $\frac{3\sin x}{(2 + \sin x)^2} + C$     **D.**  $-\frac{3\sin x}{\ln(2 + \sin x)} + C$

**Câu 92.** Tính  $\int \cos x \cdot \sqrt[3]{\sin x} dx$  bằng:

**A.**  $\frac{3}{4}\sqrt[3]{\sin^4 x} + C$     **B.**  $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\sin^3 x} + C$     **C.**  $\frac{4}{3}\sqrt[4]{\sin^3 x} + C$     **D.**  $\frac{4}{3}\sqrt[3]{\sin^4 x} + C$

**Câu 93.** Tính  $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$  bằng:

**A.**  $\frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C$     **B.**  $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C$     **C.**  $\frac{\sin^2 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{5} + C$     **D.**  $\frac{\sin^3 x}{5} - \frac{\sin^5 x}{3} + C$

**Câu 94.** Tính  $\int \cos^3 x dx$  bằng:

**A.**  $\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x + C$     **B.**  $\frac{1}{3}\sin x - \sin^3 x + C$     **C.**  $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$     **D.**  $\frac{1}{3}\sin x + \sin^3 x + C$

**Câu 95.** Tính  $\int \sin^5 x dx$  bằng:

**A.**  $\cos x - \frac{2}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$     **B.**  $\frac{2}{3}\cos x - \cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$   
**C.**  $\cos x - \frac{1}{5}\cos^3 x + \frac{2}{3}\cos^5 x + C$     **D.**  $\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$

**Câu 96.** Tính  $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx$  bằng:

**A.**  $\ln|\sin x - \cos x| + C$     **B.**  $-\ln|\sin x - \cos x| + C$     **C.**  $\ln|\sin x + \cos x| + C$     **D.**  $-\ln|\sin x + \cos x| + C$

**Câu 97.** Tính  $\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{3\cos x + 2\sin x} dx$  bằng:

**A.**  $\ln|3\cos x + 2\sin x| + C$     **B.**  $-\ln|3\cos x + 2\sin x| + C$   
**C.**  $\ln|3\sin x - 2\cos x| + C$     **D.**  $-\ln|3\sin x - 2\cos x| + C$

**Câu 98.** Tính  $\int \frac{\cot x}{\sin^2 x} dx$  bằng:

**A.**  $-\frac{\cot^2 x}{2} + C$     **B.**  $\frac{\cot^2 x}{2} + C$     **C.**  $-\frac{\tan^2 x}{2} + C$     **D.**  $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

**Câu 99.** Tính  $\int (\tan x + \tan^3 x) dx$  bằng:

**A.**  $-\frac{\tan^2 x}{2} + C$     **B.**  $2\tan^2 x + C$     **C.**  $-2\tan^2 x + C$     **D.**  $\frac{\tan^2 x}{2} + C$

**Câu 100.** Tính  $\int xe^{\frac{x}{3}} dx$  bằng:

**A.**  $3(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$     **B.**  $(x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$     **C.**  $\frac{1}{3}(x-3)e^{\frac{x}{3}} + C$     **D.**  $\frac{1}{3}(x+3)e^{\frac{x}{3}} + C$

## CHUYÊN ĐỀ 6 : HÌNH HỌC OXYZ

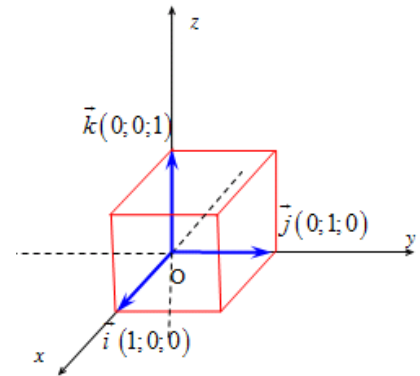
### CHỦ ĐỀ: TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

#### A - LÝ THUYẾT

##### 1. Hệ trục tọa độ trong không gian

Trong không gian, xét ba trục tọa độ  $Ox, Oy, Oz$  vuông góc với nhau từng đôi một và chung một điểm gốc  $O$ . Gọi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vectơ đơn vị, tương ứng trên các trục  $Ox, Oy, Oz$ . Hệ ba trục như vậy gọi là **hệ trục tọa độ vuông góc** trong không gian.

Chú ý:  $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$  và  $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ .



##### 2. Tọa độ của vector

a) **Định nghĩa:**  $\vec{u} = (x; y; z) \Leftrightarrow \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

b) **Tính chất:** Cho  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3), \vec{b} = (b_1; b_2; b_3), k \in \mathbb{R}$

$$\bullet \vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$$

$$\bullet k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3)$$

$$\bullet \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\bullet \vec{0} = (0; 0; 0), \vec{i} = (1; 0; 0), \vec{j} = (0; 1; 0), \vec{k} = (0; 0; 1)$$

$$\bullet \vec{a} \text{ cùng phương } \vec{b} (\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \quad (b_1, b_2, b_3 \neq 0)$$

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad \bullet \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$

$$\bullet \vec{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad \bullet |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\bullet \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (\text{với } \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0})$$

##### 3. Tọa độ của điểm

a) **Định nghĩa:**  $M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (x : \text{hoành độ}, y : \text{tung độ}, z : \text{cao độ})$

Chú ý:  $\bullet M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$

$$\bullet M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0.$$

b) **Tính chất:** Cho  $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$

$$\bullet \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

$$\bullet AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$\bullet \text{Toạ độ trung điểm } M \text{ của đoạn thẳng } AB: M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

$$\bullet \text{Toạ độ trọng tâm } G \text{ của tam giác } ABC: G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

$$\bullet \text{Toạ độ trọng tâm } G \text{ của tứ diện } ABCD:$$

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

#### 4. Tích có hướng của hai vector

**a) Định nghĩa:** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vector  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ . Tích có hướng của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , kí hiệu là  $[\vec{a}, \vec{b}]$ , được xác định bởi

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$$

**Chú ý:** Tích có hướng của hai vector là một vector, tích vô hướng của hai vector là một số.

**b) Tính chất:**

- $[\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{a}; [\vec{a}, \vec{b}] \perp \vec{b}$
- $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$
- $[\vec{i}, \vec{j}] = \vec{k}; [\vec{j}, \vec{k}] = \vec{i}; [\vec{k}, \vec{i}] = \vec{j}$
- $|\vec{a}, \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\vec{a}, \vec{b})$
- $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$  (chứng minh 3 điểm thẳng hàng)

**c) Ứng dụng của tích có hướng: (Chương trình nâng cao)**

- **Điều kiện đồng phẳng của ba vector:**  $\vec{a}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$
- **Diện tích hình bình hành  $ABCD$ :**  $S_{\square ABCD} = |[\vec{AB}, \vec{AD}]|$
- **Diện tích tam giác  $ABC$ :**  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |[\vec{AB}, \vec{AC}]|$
- **Thể tích khối hộp  $ABCD A'B'C'D'$ :**  $V_{ABCD A'B'C'D'} = |[\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'}|$
- **Thể tích tứ diện  $ABCD$ :**  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$

**Chú ý:**

- **Tích vô hướng** của hai vector thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.
- **Tích có hướng** của hai vector thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vector đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vector cùng phương.
- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ,  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$
- $\vec{a}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$  đồng phẳng  $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c} = 0$

#### 5. Một vài thao tác sử dụng máy tính bỏ túi (Casio Fx570 Es Plus, Casio Fx570 Vn Plus, Vinacal 570 Es Plus)

Trong không gian  $Oxyz$  cho bốn điểm  $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B), C(x_C; y_C; z_C), D(x_D; y_D; z_D)$

w 8 1 1 (nhập vector  $\vec{AB}$ )

C q 5 2 2 2 (nhập vector  $\vec{AC}$ )

C q 5 2 3 1 (nhập vector  $\vec{AD}$ )

C q 5 3 q 5 4 = (tính  $[\vec{AB}, \vec{AC}]$ )

C q 5 3 q 5 4 q 5 7 q 5 5 = (tính  $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}$ )

C q c (Abs) q 5 3 q 5 4 q 5 7 q 5 5 = (tính  $|[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$ )

C 1 a 6 q c (Abs) q 5 3 q 5 4 q 5 7 q 5 5 = (tính  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}|$ )

## B - BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

- Câu 1.** Cho vector  $\vec{a} = (1; 3; 4)$ , tìm vector  $\vec{b}$  cùng phương với vector  $\vec{a}$   
 A.  $\vec{b} = (-2; -6; -8)$ .    B.  $\vec{b} = (-2; -6; 8)$ .    C.  $\vec{b} = (-2; 6; 8)$ .    D.  $\vec{b} = (2; -6; -8)$ .
- Câu 2.** Tích vô hướng của hai vector  $\vec{a} = (-2; 2; 5)$ ,  $\vec{b} = (0; 1; 2)$  trong không gian bằng  
 A. 10.    B. 13.    C. 12.    D. 14.
- Câu 3.** Trong không gian cho hai điểm  $A(-1; 2; 3)$ ,  $B(0; 1; 1)$ , độ dài đoạn  $AB$  bằng  
 A.  $\sqrt{6}$ .    B.  $\sqrt{8}$ .    C.  $\sqrt{10}$ .    D.  $\sqrt{12}$ .
- Câu 4.** Trong không gian  $Oxyz$ , gọi  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  là các vector đơn vị, khi đó với  $M(x; y; z)$  thì  $\overrightarrow{OM}$  bằng  
 A.  $-x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ .    B.  $x\vec{i} - y\vec{j} - z\vec{k}$ .    C.  $x\vec{j} + y\vec{i} + z\vec{k}$ .    D.  $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .
- Câu 5.** Tích có hướng của hai vector  $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$  là một vector, kí hiệu  $[\vec{a}, \vec{b}]$ , được xác định bằng tọa độ  
 A.  $(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ .    B.  $(a_2b_3 + a_3b_2; a_3b_1 + a_1b_3; a_1b_2 + a_2b_1)$ .  
 C.  $(a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 + a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1)$ .    D.  $(a_2b_2 - a_3b_3; a_3b_3 - a_1b_1; a_1b_1 - a_2b_2)$ .
- Câu 6.** Cho các vector  $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$  và  $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ ,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  khi và chỉ khi  
 A.  $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 1$ .    B.  $u_1 + v_1 + u_2 + v_2 + u_3 + v_3 = 0$ .  
 C.  $u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$ .    D.  $u_1v_2 + u_2v_3 + u_3v_1 = -1$ .
- Câu 7.** Cho vector  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ , độ dài vector  $\vec{a}$  là  
 A.  $\sqrt{6}$ .    B. 2.    C.  $-\sqrt{6}$ .    D. 4.
- Câu 8.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  nằm trên trục  $Ox$  sao cho  $M$  không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm  $M$  có dạng  
 A.  $M(a; 0; 0), a \neq 0$ .    B.  $M(0; b; 0), b \neq 0$ .    C.  $M(0; 0; c), c \neq 0$ .    D.  $M(a; 1; 1), a \neq 0$ .
- Câu 9.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho điểm  $M$  nằm trên mặt phẳng  $(Oxy)$  sao cho  $M$  không trùng với gốc tọa độ và không nằm trên hai trục  $Ox, Oy$ , khi đó tọa độ điểm  $M$  là  $(a, b, c \neq 0)$   
 A.  $(0; b; a)$ .    B.  $(a; b; 0)$ .    C.  $(0; 0; c)$ .    D.  $(a; 1; 1)$
- Câu 10.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho  $\vec{a} = (0; 3; 4)$  và  $|\vec{b}| = 2|\vec{a}|$ , khi đó tọa độ vector  $\vec{b}$  có thể là  
 A.  $(0; 3; 4)$ .    B.  $(4; 0; 3)$ .    C.  $(2; 0; 1)$ .    D.  $(-8; 0; -6)$ .
- Câu 11.** Trong không gian  $Oxyz$  cho hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$ , khi đó  $[\vec{u}, \vec{v}]$  bằng  
 A.  $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$ .    B.  $|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .    C.  $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .    D.  $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \sin(\vec{u}, \vec{v})$ .
- Câu 12.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba vector  $\vec{a} = (1; -1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 0; -1)$ ,  $\vec{c} = (-2; 5; 1)$ , vector  $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$  có tọa độ là  
 A.  $(6; 0; -6)$ .    B.  $(-6; 6; 0)$ .    C.  $(6; -6; 0)$ .    D.  $(0; 6; -6)$ .
- Câu 13.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1; 0; -3)$ ,  $B(2; 4; -1)$ ,  $C(2; -2; 0)$ . Độ dài các cạnh  $AB, AC, BC$  của tam giác  $ABC$  lần lượt là

A.  $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{37}$ .      B.  $\sqrt{11}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$ .      C.  $\sqrt{21}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$ .      D.  $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{35}$ .

**Câu 14.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1;0;-3), B(2;4;-1), C(2;-2;0)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  là

A.  $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ .      B.  $\left(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$ .      C.  $(5;2;4)$ .      D.  $\left(\frac{5}{2}; 1; -2\right)$ .

**Câu 15.** Trong không gian  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(1;2;0), B(-1;1;3), C(0;-2;5)$ . Để 4 điểm  $A, B, C, D$  đồng phẳng thì tọa độ điểm  $D$  là

A.  $D(-2;5;0)$ .      B.  $D(1;2;3)$ .      C.  $D(1;-1;6)$ .      D.  $D(0;0;2)$ .

**Câu 16.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1;2;3), \vec{b} = (-2;0;1), \vec{c} = (-1;0;1)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$

A.  $\vec{n} = (6;2;6)$ .      B.  $\vec{n} = (6;2;-6)$ .      C.  $\vec{n} = (0;2;6)$ .      D.  $\vec{n} = (-6;2;6)$ .

**Câu 17.** Trong không gian  $Oxyz$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;0;2), B(-2;1;3), C(3;2;4)$ . Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$

A.  $G\left(\frac{2}{3}; 1; 3\right)$ .      B.  $G(2;3;9)$ .      C.  $G(-6;0;24)$ .      D.  $G\left(2; \frac{1}{3}; 3\right)$ .

**Câu 18.** Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ , khi đó  $\cos \varphi$  bằng

A.  $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .      B.  $\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .      C.  $\frac{-\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .      D.  $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ .

**Câu 19.** Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a} = (1;2;0)$  và  $\vec{b} = (2;0;-1)$ , khi đó  $\cos \varphi$  bằng

A. 0.      B.  $\frac{2}{5}$ .      C.  $\frac{2}{\sqrt{5}}$ .      D.  $-\frac{2}{5}$ .

**Câu 20.** Cho 3 điểm  $M(2;0;0), N(0;-3;0), P(0;0;4)$ . Nếu  $MNPQ$  là hình bình hành thì tọa độ của điểm  $Q$  là

A.  $Q(-2;-3;4)$       B.  $Q(2;3;4)$       C.  $Q(3;4;2)$       D.  $Q(-2;-3;-4)$

**Câu 21.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$ . Để tứ giác  $MNPQ$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $Q$  là

A.  $Q(-6;5;2)$ .      B.  $Q(6;5;2)$ .      C.  $Q(6;-5;2)$ .      D.  $Q(-6;-5;-2)$ .

**Câu 22.** Cho 3 điểm  $A(1;2;0), B(1;0;-1), C(0;-1;2)$ . Tam giác  $ABC$  là

A. tam giác có ba góc nhọn.      B. tam giác cân đỉnh  $A$ .  
C. tam giác vuông đỉnh  $A$ .      D. tam giác đều.

**Câu 23.** Trong không gian tọa độ  $Oxyz$  cho ba điểm  $A(-1;2;2), B(0;1;3), C(-3;4;0)$ . Để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành thì tọa độ điểm  $D$  là

A.  $D(-4;5;-1)$ .      B.  $D(4;5;-1)$ .      C.  $D(-4;-5;-1)$ .      D.  $D(4;-5;1)$ .

**Câu 24.** Cho vectơ  $\vec{a}(2;3;-5), \vec{b}(0;-1;2), \vec{c}(1;2;7)$ . Tính tọa độ của vectơ:  $\vec{d} = \vec{a} - 4\vec{b} - 2\vec{c}$

A.  $\vec{d} = (0;-3;-27)$       B.  $\vec{d} = (0;3;-27)$

C.  $\vec{d} = (0; 3; 27)$

D.  $\vec{d} = (0; -27; -3)$

**Câu 25.** Cho các điểm  $A(1; 3; 2); B(5; 4; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  để tứ giác  $OABC$  là hình bình hành.

A.  $(4; -1; -2)$ .

B.  $(4; -2; 1)$ .

C.  $(4; 1; -2)$ .

D.  $(-4; -1; 2)$ .

**Câu 26.** Cho các điểm  $E(4; -5; -3), I(2; -9; -1)$ . Tìm tọa độ điểm  $F$  biết  $I$  là trung điểm của đoạn  $EF$ .

A.  $(0; 1; -13)$ .

B.  $(0; -13; 1)$ .

C.  $(0; 13; 1)$ .

D.  $(0; -13; -1)$ .

**Câu 27.** Cho các điểm  $E(1; -7; 3), F(2; -14; 6), N(3; m-2; 9)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để ba điểm  $E, F, N$  thẳng hàng.

A.  $-20$ .

B.  $-21$ .

C.  $-22$ .

D.  $-19$ .

**Câu 28.** Cho các vector  $\vec{a}(2; 1; -1), \vec{b}(m; -1; 3), \vec{c}(1; 1; 2)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  để ba vector đồng phẳng.

A.  $\frac{8}{3}$ .

B.  $-\frac{3}{8}$ .

C.  $-\frac{8}{3}$ .

D.  $-\frac{7}{3}$ .

**Câu 29.** Cho vector  $\vec{u}(2; 0; -1)$ . Tìm vector  $\vec{v}$  biết  $\vec{v}$  cùng phương với  $\vec{u}$  và  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 20$

A.  $(8; 0; 4)$ .

B.  $(4; 0; -2)$ .

C.  $(-8; 0; 4)$ .

D.  $(8; 0; -4)$ .

**Câu 30.** Cho các vector  $\vec{a}(2; 3; 1), \vec{b}(3; -2; 4), \vec{c}(3; 7; 0)$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A.  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{b}$ .

B.  $\vec{a}$  vuông góc với  $\vec{c}$ .

C.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  không đồng phẳng.

D.  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  đồng phẳng.

**Câu 31.** Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để hai vector  $\vec{u}(m^2; 12; 4), \vec{v}(1; -m; 5)$  vuông góc với nhau.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

**Câu 32.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để vector  $\vec{u}(-6; 8; m-1)$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{u}| = \sqrt{181}$ .

A.  $m = -8$  hoặc  $m = 10$ .

B.  $m = 8$  hoặc  $m = 10$ .

C.  $m = -8$  hoặc  $m = -10$ .

D.  $m = 9$  hoặc  $m = -9$ .

**Câu 33.** Cho các vector  $\vec{a}(-1; 3; -2), \vec{b}(1; -6; 2), \vec{c}(2; 6; 4), \vec{d}(4; -12; 8)$ . Trong các vector trên có mấy vector cùng phương với vector  $\vec{u} = (2; -6; 4)$ .

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

**Câu 34.** Cho các vector  $\vec{a}(0; 3; -6), \vec{b}(-4; 2; 0), \vec{c}(-5; 1; 2), \vec{d}(3; 4; -5)$ . Tính  $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{d}$ ?

A. 15.

B. -16.

C. 16.

D. -15.

**Câu 35.** Cho các vector  $\vec{a}(1; 2; 3), \vec{b}(2; 1; m), \vec{c}(2; m; 1)$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để ba vector trên đồng phẳng?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

**Câu 36.** Cho  $\triangle ABC$  với  $A(1; 2; 1), B(5; 3; 4), C(8; -3; 2)$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng:

A.  $\triangle ABC$  có ba góc nhọn.

B.  $\triangle ABC$  đều.

C.  $\triangle ABC$  có một góc tù.

D.  $\triangle ABC$  có một góc vuông.

- Câu 37.** Cho các điểm  $M(0; -1; 0), N(0; 0; 2), P(0; 1; 2)$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?
- A.  $M, N, P$  thẳng hàng.  
 B.  $M, N, P$  không thẳng hàng.  
 C.  $M, N, P$  thẳng hàng và  $N$  nằm trong đoạn  $MP$ .  
 D.  $M, N, P$  thẳng hàng và  $P$  nằm trong đoạn  $MN$ .
- Câu 38.** Cho các điểm  $E(1; -1; 2), F(-1; 1; 1), K(1; 1; 0)$ . Tính  $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OK}$
- A. 1.                                      B. -1.                                      C. 2.                                      D. 0.
- Câu 39.** Tìm vector  $\vec{u}$  thỏa mãn:  $|\vec{u}| = 5, \vec{u}$  vuông góc với trục  $Ox$  và vuông góc với vector  $\vec{v}(3; 6; 8)$
- A.  $\vec{u}(0; -4; 3)$  hoặc  $\vec{u}(0; 4; -3)$ .                                      B.  $\vec{u}(0; 4; 3)$  hoặc  $\vec{u}(0; -4; -3)$ .  
 C.  $\vec{u}(0; 3; -4)$  hoặc  $\vec{u}(0; -3; 4)$ .                                      D.  $\vec{u}(-4; 3; 0)$  hoặc  $\vec{u}(4; -3; 0)$ .
- Câu 40.** Cho  $\Delta MNP$  với  $M(2; 0; 0), N(0; 0; 2), P(4; 2; 2)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta MNP$ .
- A.  $(2; 2; 1)$ .                                      B.  $(2; 1; 2)$ .                                      C.  $(2; -1; 2)$ .                                      D.  $(-2; 1; 2)$ .
- Câu 41.** Cho  $\vec{a}(2; \sqrt{3}; 1), \vec{b}(\sin 5t; \cos 3t; \sin 3t)$ . Có bao nhiêu giá trị của  $t$  để  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ?
- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. vô số giá trị của  $t$ .
- Câu 42.** Cho ba điểm  $M(2; 5; 3), N(3; 7; 4), P(a; b; 6)$ . Biết rằng các điểm  $M, N, P$  thẳng hàng. Tính  $a + b$ ?
- A. 15.                                      B. 16.                                      C. 17.                                      D. 14.
- Câu 43.** Cho các điểm  $M(0; 2; -2), N(4; 3; 0), P(-3; 1; -1), Q(1; 2; m)$ . Tìm giá trị của tham số  $m$  biết các điểm  $M, N, P, Q$  đồng phẳng.
- A. 3.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. -1.
- Câu 44.** Cho tứ diện  $MNPQ$  với  $M(1; 1; 0), N(-5; 1; 0), P(-5; -3; 0), Q(2; -3; 21)$ . Thể tích tứ diện  $MNPQ$  bằng?
- A. 82.                                      B. 86.                                      C. 84.                                      D. 81.
- Câu 45.** Cho các vector  $\vec{a}(7; 0; 3), \vec{b}(3; 1; 2), \vec{c}(-2; 4; 3)$ . Khẳng định nào dưới đây là đúng?
- A. Ba vector không đồng phẳng.  
 B. Ba vector đồng phẳng.  
 C. Có ít nhất hai vector vuông góc với nhau.  
 D. Có ít nhất hai vector có độ dài bằng nhau.
- Câu 46.** Cho các điểm  $M(-1; 1; 2), N(1; 0; 3), P(3; -1; 2)$  và điểm  $Q(0; a; 0)$  với  $a > 0$ , biết  $V_{MNPQ} = 5$ . Tìm giá trị của  $a$ ?
- A. 6.                                      B. 7.                                      C. 8.                                      D. 11.
- Câu 47.** Cho các điểm  $E(2; -2; 4), F(2; -1; 5), G(4; 3; 2), H(4; -8; 9)$ . Gọi  $I$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IH} = \vec{0}$ .  $I'$  là hình chiếu vuông góc của điểm  $I$  lên mặt phẳng  $(Oxy)$ . Tọa độ  $I'$  là:
- A.  $(3; -2; 0)$ .                                      B.  $(3; 2; 0)$ .                                      C.  $(-3; 2; 0)$ .                                      D.  $(3; -2; 5)$ .

**Câu 48.** Cho các điểm  $M(1;0;0)$ ,  $N(0;1;0)$ ,  $P(2;1;1)$ . Tính độ dài đường cao  $MH$  của  $\triangle MNP$ ?

- A.  $\frac{\sqrt{27}}{5}$ .      B.  $\frac{\sqrt{29}}{5}$ .      C.  $\frac{\sqrt{30}}{5}$ .      D.  $\frac{\sqrt{32}}{5}$ .

**Câu 49.** Tìm điểm  $I$  trên mặt phẳng  $(Oxz)$  cách đều ba điểm:  $M(1;1;1)$ ,  $N(0;1;-1)$ ,  $P(-1;1;3)$ ?

- A.  $\left(\frac{7}{6}; 0; \frac{5}{6}\right)$ .      B.  $\left(\frac{-7}{6}; 0; \frac{5}{6}\right)$ .      C.  $\left(\frac{-7}{6}; 0; \frac{-5}{6}\right)$ .      D.  $\left(\frac{-4}{5}; 0; \frac{5}{6}\right)$ .

**Câu 50.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho điểm  $A(1;2;3)$  và điểm  $B$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{OB} = \vec{k} - 3\vec{i}$ . Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$ . Tìm tọa độ điểm  $M$ ?

- A.  $M(-1;1;2)$ ..      B.  $M(-4;-2;-2)$ ..      C.  $M\left(1; -\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ ..      D.  $M(-2;-1;-1)$ .

**Câu 51.** Trong không gian với hệ tọa độ  $Oxyz$ , cho các điểm  $A(2;3;1)$ ,  $B(-1;2;0)$ ,  $C(1;1;-2)$ .  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ . Khi đó, độ dài  $OH$  bằng:

- A.  $\frac{\sqrt{870}}{14}$ .      B.  $\frac{\sqrt{870}}{12}$ .      C.  $\frac{\sqrt{870}}{15}$ .      D.  $\frac{\sqrt{870}}{16}$ .